

Correction Série 11

Exercice 1. Soit K un corps. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(K)$$

1. Calculer son rang en fonction de $\text{car}(K)$.

Solution 1. See Solutions to sheet 10.

Exercice 2. Montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont equivalentes mais pas semblables. Pour cela on peut raisonner par l'absurde et considerer un endomorphisme $\varphi : V \rightarrow V$ dont les matrices dans des bases convenables sont M et N . On calculera alors

$$\text{rg}(\varphi - \text{Id}_V)$$

de deux manieres differentes.

Solution 2. To show that M and N are equivalent we want to find two invertible matrices A and B such that $M = ANB$. This is given for

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assume that M and N are similar. Then there exists an invertible matrix A such that $M = ANA^{-1}$. We can conjugate both sides by some invertible matrix B obtaining $BMB^{-1} = BAN A^{-1} B^{-1} = BAN(BA)^{-1}$. We write $BA = C$ and consider the endomorphism φ given by BMB^{-1} and CNC^{-1} (Note that this is not necessary, a simplified version is written in the solutions of Exercise 3.1). Now $\text{rg}(\varphi - \text{Id}_V) =$

$\text{rg}(BMB^{-1} - \text{Id}_V)$ and $\text{rg}(\varphi - \text{Id}_V) = \text{rg}(CNC^{-1} - \text{Id}_V)$. Note that the rank is stable under conjugation, i.e. for an invertible matrix D and any matrix E we have $\text{rg}(DED^{-1}) = \text{rg}(E)$. Furthermore conjugating a matrix is linear. Then

$$\text{rg}(BMB^{-1} - \text{Id}_V) = \text{rg}(BMB^{-1} - B\text{Id}_V B^{-1}) = \text{rg}(B(M - \text{Id}_V)B^{-1}) = \text{rg}(M - \text{Id}_V) = 1$$

and

$$\text{rg}(CNC^{-1} - \text{Id}_V) = \text{rg}(N - \text{Id}_V) = 2.$$

This is a contradiction. Hence M and N can not be similar.

Exercice 3. Soient $M, N \in M_d(K)$.

1. On suppose qu'il existe $\lambda \in K$ tel que

$$\text{rg}(M - \lambda \cdot \text{Id}_d) \neq \text{rg}(N - \lambda \cdot \text{Id}_d).$$

Montrer que M et N ne sont pas semblables.

2. Montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont équivalentes (et même lignes-équivalentes¹) mais pas semblables.

3. Montrer que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont semblables. Pour cela on identifiera M et N avec des endomorphisme φ, ψ de l'espace $\text{Col}_4(K)$ des vecteurs colonnes de hauteur 4 (dont les matrices dans la base canonique sont M et N). On cherchera des bases de $\ker(\varphi - 2\text{Id}_4)$ et $\ker(\psi - 2\text{Id}_4)$ et on en deduera une base de $\text{Col}_4(K)$ telle que la matrice de φ dans cette base est N .

Solution 3.

1. This is the same as in Exercise 2. Assume that M and N are similar. Then $M = ANA^{-1}$. Hence

$$\begin{aligned} \text{rg}(M - \lambda \cdot \text{Id}_d) &= \text{rg}(ANA^{-1} - \lambda \cdot \text{Id}_d) = \text{rg}(ANA^{-1} - A\lambda \cdot \text{Id}_d A^{-1}) \\ &= \text{rg}(A(N - \lambda \cdot \text{Id}_d)A^{-1}) = \text{rg}(N - \lambda \cdot \text{Id}_d). \end{aligned}$$

1. on peut passer de l'une a l'autre par des operations elementaires sur les lignes

This is in contradiction with

$$\text{rg}(M - \lambda \cdot \text{Id}_d) \neq \text{rg}(N - \lambda \cdot \text{Id}_d).$$

2. To show that the matrices are equivalent note that

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{Id}_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To see that they are line equivalent note that we obtain M by adding $-1/2$ times the fourth row of N to the third row of N . To see that they are not similar we compute

$$\text{rg}(M - 2 \cdot \text{Id}_4) = 2 \text{ and } \text{rg}(N - 2 \cdot \text{Id}_4) = 3$$

and use the first part of this exercise.

3. We first compute the kernel of $M_2 \cdot \text{Id}_4$. We have

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + t \\ -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

giving us the two equations $-x + y + t = 0$ and $-y = 0$ to describe the kernel.

We first set $z = 0$ and express x and y in terms of t giving us $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hence the first basis vector is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Then we set $t = 0$ and express x and y

in terms of z (they are just 0 if $t = 0$) giving us the second basis vector of the

basis : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Similarly we obtain the basis vectors for $\ker(N_2 - 2 \cdot \text{Id}_4)$, they are

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. The basis that we want to change to (starting in the canonical

basis), to see that M and N are similar is then

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

And indeed we have that

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (De l'interet de changer de base (\star)). Soit K un corps de caracteristique $\neq 3$ et

$$\begin{aligned} \varphi : K^2 &\mapsto K^2 \\ (x, y) &\mapsto (x/3 + 4y/3, -x/3 + 5y/3). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{(2, 1), (1, 2)\}$

1. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique \mathcal{B}_0 .
2. Montrer que \mathcal{B} est une base de K^2 et exprimer $(1, 0)$ et $(0, 1)$ en fonction de \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 et calculer la matrice N de φ dans cette base de deux manieres :
 - Par la formule de changement de base pour les matrices.
 - Directement en exprimant $\varphi(\mathbf{f}_i)$ $i = 1, 2$ en combinaison lineaire de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.
 - Montrer que si on avait $\text{car}(K) = 3$ alors \mathcal{B} ne serait pas une base.
3. Calculer par recurrence N^n pour tout entier $n \geq 0$ (on pose $N^0 = \text{Id}_2$).
4. Montrer par recurrence que si $C \in \text{GL}_2(K)$ et $U \in M_2(K)$ alors pour tout $n \geq 0$

$$(C.U.C^{-1})^n = C.U^n.C^{-1}.$$
5. En deduire une expression (relativement) elementaire de la puissance M^n pour tout $n \geq 0$.

Solution 4.

1. We will denote the elements of the canonical basis \mathcal{B}^0 by $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (0, 1)$. Observe that

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \right), \\ \varphi(e_2) &= \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

2. Observe that if $\text{car}(K) \neq 3$, f_1 and f_2 are linearly independent (libre) : By definition we have

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = \lambda_2 \\ 2\lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = \lambda_2 \\ 3\lambda_2 = -\lambda_0 \end{cases}$$

If $\text{car}(K) \neq 3$ then $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ and the vectors are linearly independent. If $\text{car}(K) = 3$ note that the system has solutions for non-zero λ_2 and therefore the vectors are not linearly independent.

We will now compute the matrix of φ in the basis of \mathcal{B} denoted by $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ using the formula of changing basis, i.e.

$$N = \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \text{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}^0} \text{Mat}_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^0} \text{Id}_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}},$$

where by Id_{AB} we denote the matrix of change basis from A to B . First we compute $\text{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}^0}$. Observe that

$$(e_1) = \frac{2}{3}f_1 - \frac{1}{3}f_2,$$

$$(e_2) = \frac{2}{3}f_2 - \frac{1}{3}f_1.$$

Therefore

$$\text{Id}_{\mathcal{B}\mathcal{B}^0} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Then we compute $\text{Id}_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}$. Observe that $f_1 = 2e_1 + e_2$ and $f_2 = e_1 + 2e_2$. Then

$$\text{Id}_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Therefore we have

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We now compute $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ directly. In order to do this one has to compute

$$\varphi(f_1) = (2, 1) = 1f_1 + 0f_2,$$

$$\varphi(f_2) = (3, 3) = f_1 + f_2.$$

These coefficients form the columns of the matrix $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ which is therefore given by

$$N = Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

This confirms our computation using the formula of changing basis.

3. Observe that by simple computations one can see that taking the n -th power of the matrix N gives us

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Observe that since $C^{-1}C = Id$ we have

$$(C.U.C^{-1})^n = C.U.C^{-1} \dots C.U.C^{-1} = C.U.U \dots U.U.C^{-1} = C.U^n.C^{-1}$$

5. We know from the theory of the course that $Id_{\mathcal{B},\mathcal{B}^0}$ is invertible and

$$Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} = Id_{\mathcal{B},\mathcal{B}^0}^{-1}.$$

Therefore for the formula of changing basis

$$M = Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^0} Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}^{-1}$$

$$M = Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} N Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}^{-1}.$$

So together with the formula from Point 4 we have $M^n = Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} N^n Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}^{-1}$

Exercice 5. Dans ces exercices un role implicite important est joue par les SEVs de la forme suivante : pour $\varphi \in \text{End}_K(V)$ et $\lambda \in K$

$$V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V).$$

Si $V_\lambda \neq \{0_V\}$ on dit que λ est une valeur propre de φ et V_λ est le sous-espace propre associe. Les vecteurs de V_λ sont les vecteurs propres de φ pour la valeur propre λ .

L'ensemble des valeurs propre s'appelle le *spectre* de φ :

$$\text{Spec}_\varphi(K) = \{\lambda \in K, V_\lambda \neq \{0_V\}\}.$$

Montrer les proprietes suivantes

1. On a

$$\dim(V_\lambda) = \dim(V) - \text{rg}(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V).$$

2. V_λ est stable par φ : $\varphi(V_\lambda) \subset V_\lambda$ et $\varphi|_{V_\lambda} = \lambda \cdot \text{Id}_{V_\lambda}$.

3. Si $\lambda \neq \lambda'$ sont des valeurs propres distinctes alors $V_\lambda \cap V_{\lambda'} = \{0_V\}$ (les espaces sont en somme directe).

Solution 5.

1. We consider the application $\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V : V \rightarrow V, v \mapsto \varphi(v) - \lambda.v$. By definition V_λ is the kernel of this application. By the definition of the rank, $\text{rg}(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V) = \dim(\text{Im}(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V))$. Using the Theoreme de Noyaux Image we have

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V)) + \dim(\text{Im}(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V)),$$

which is exactly what we want to show.

2. First we show $\varphi(V_\lambda) \subset V_\lambda$. Consider $v \in V_\lambda$. Then $v \in \ker(\varphi - \lambda \cdot \text{Id}_V)$ and hence

$$\varphi(v) - \lambda.v = 0 \Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda.v.$$

Now we need to show that $\varphi(v) \in V_\lambda$, i.e.

$$\varphi(\varphi(v)) - \lambda.\varphi(v) = 0.$$

But from the above we know that $\varphi(v) = \lambda.v$ and φ is linear, so

$$\varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda.v) = \lambda.\varphi(v)$$

which is exactly what we needed to show. We furthermore have $\varphi|_{V_\lambda} = \lambda \cdot \text{Id}_{V_\lambda}$ directly from the fact that for $v \in V_\lambda$ we have $\varphi(v) = \lambda.v$

3. Take $v \in V_\lambda \cap V_{\lambda'}$. Then we have that $v \in V_\lambda$ and $v \in V_{\lambda'}$. From our deductions in part 2 that means that $\varphi(v) = \lambda.v$ and $\varphi(v) = \lambda'.v$. Since $\lambda \neq \lambda'$ this is only possible for $v = 0$.

Exercice 6. Soit K un corps. On considere la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(K)$$

1. Donner une succession de transformations elementaires qui transforment M en la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \text{car}(K) = 2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } \text{car}(K) \neq 2$$

Solution 6. Si $\text{car}(K) = 2$ la matrice sera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On observe que la première et la dernière ligne sont les mêmes. En multipliant à gauche par $Cl_{13,-1}$ on a

$$Cl_{13,-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\text{car}(K) \neq 2$ on effectue les opérations suivantes

$$Cl_{21,-2}Cl_{31,-3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$Cl_{13,1}D_{2,-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$Cl_{32,2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_{2,-1/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Cl_{13,5}Cl_{23,-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on a fini.

Exercice 7. Soient V et W des K -EVs de dimension finie isomorphes (en particulier $\dim V = \dim W = d$). On suppose que ces espaces sont isomorphes : ie. il existe un isomorphisme

$$\psi : V \simeq W.$$

1. Montrer que l'application

$$\text{Ad}(\psi) : \varphi \rightarrow \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

est une application lineaire de $\text{End}(V)$ sur $\text{End}(W)$.

2. Montrer de deux manieres que c'est un isomorphisme de $\text{End}(V)$ sur $\text{End}(W)$ (par un argument de dimension, en trouvant une reciproque).
3. Montrer que $\text{Ad}(\psi)$ est un isomorphisme de K -algebre.
4. Montrer que les groupes lineaires $\text{Aut}(V) = \text{GL}(V)$ et $\text{Aut}(W) = \text{GL}(W)$ sont isomorphes (comme groupes).

Solution 7.

1. Ceci suit d'un calcul direct. Pour $\phi_1, \phi_2 \in \text{End}(V)$, $\alpha \in K$ et $w \in W$ quelconque, on a $\text{Ad}(\psi)(\alpha\phi_1 + \phi_2) : w \mapsto \psi \circ (\alpha\phi_1 + \phi_2) \circ \psi^{-1}(w) = \psi \circ (\alpha\phi_1(\psi^{-1}(w)) + \phi_2(\psi^{-1}(w))) = (\alpha\text{Ad}(\psi)(\phi_1) + \text{Ad}(\psi)(\phi_2))(w)$.
2. Observons que $\text{Ad}(\psi)$ est injective : en effet, si $\psi \circ \phi \circ \psi^{-1} = 0$, alors en composant avec ψ^{-1} à gauche et ψ à droite on obtient $\phi = 0$ et par conséquent le noyau est trivial. Comme V et W sont isomorphes, $\text{End}(V)$ et $\text{End}(W)$ ont la même dimension et par le fait que $\text{Ad}(\psi)$ est injective, on déduit par le théorème noyau-image que le dernier est en fait un isomorphisme. On aurait pu obtenir le même résultat en montrant par un calcul direct que $\text{Ad}(\psi^{-1})$ est l'inverse de $\text{Ad}(\psi)$.
3. Pour ceci, il suffit de montrer que $\text{Ad}(\psi)$ est un homomorphisme d'anneaux : $\text{Ad}(\psi)(\phi_1 \circ \phi_2) = \psi \circ (\phi_1 \circ \phi_2) \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \phi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi_2 \circ \psi^{-1}) = \text{Ad}(\psi)(\phi_1) \circ \text{Ad}(\psi)(\phi_2)$.
4. Observons que $\text{Ad}(\psi)(\text{Id}) = \text{Id}$ et que l'image par $\text{Ad}(\psi)$ d'un automorphisme ϕ est un automorphisme avec inverse donné par $\text{Ad}(\psi)(\phi^{-1})$. En effet, $\text{Ad}(\psi)(\phi) \circ \text{Ad}(\psi)(\phi^{-1}) = \text{Ad}(\psi)(\phi \circ \phi^{-1}) = \text{Id}$ et la composition dans l'autre sens nous donne le même résultat. Par conséquent, en utilisant les points précédents, $\text{Ad}(\psi)$ se restreint à un isomorphisme entre $\text{End}(V)^\times = \text{Aut}(V)$ et $\text{End}(W)^\times = \text{Aut}(W)$.

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \leq d} \in M_d(K)$ une matrice et $[A.]$, l'application de multiplication a gauche par A :

$$[A.] : M \in M_d(K) \mapsto A.M \in M_d(K).$$

1. Montrer que $[A.]$ est lineaire.
2. Montrer que $[A.]$ est inversible ssi A est inversible.
3. Montrer que

$$A^2 = \mathbf{0}_d \text{ ssi } \text{Im}([A.]) \subset \text{ker}([A.])$$

(pour une direction remarquer que $A \in \text{Im}([A.])$).

4. On considere l'application

$$A \in M_d(K) \mapsto [A.] \in \text{End}(M_d(K)).$$

Montrer qu'elle est lineaire et injective.

5. Est ce que cette application est un morphisme d'algebre ?
6. Pour $d = 2$, calculer la matrice de $[A.]$ dans la base canonique de $M_2(K)$ (formee des matrices elementaires dans l'ordre ci-dessous)

$$\mathcal{B}_{22}^0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}.$$

Solution 8.

From now on the matrix multiplication $A.B$ will be just denoted by AB .

1. To prove that the application $[A.]$ is linear it is sufficient to show that

$$[A.](N_1 + \lambda N_2) = [A.](N_1) + \lambda[A.](N_2)$$

for any $\lambda \in K$ and $N_1, N_2 \in M_2(K)$. This follows by the properties of multiplication of matrices.

2. We first show A invertible implies $[A.]$ invertible. If A is invertible, there exists a matrix A^{-1} such that $A^{-1}A = AA^{-1} = Id_d$. It is easy to check that then $[A^{-1}]$ is the inverse application of $[A.]$.

Now we show $[A.]$ invertible implies A invertible. If $[A.]$ is invertible, the map $M \mapsto AM$ is bijective, in particular it is surjective onto $M_d(K)$. Hence there is a preimage of the identity, i.e. there exists M such that $AM = Id_d$. This M is then the inverse of A and hence A is invertible.

3. We would like to prove that $A^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Im}[A.] \subset \text{ker}[A.]$. We will use the following notation. A matrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ will be denoted in vector form

as $m = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix}$ (and we say M is the matrix form of m).

We will first prove this implication (\Rightarrow). Suppose $A^2 = 0$ and let $v \in \text{Im}[A.]$. Then there exists w such that $v = [A.]w$. This implies that in matrix form $V = AW$. Since $A^2 = 0$ we have $AV = AA w = 0$. This can be written as $[A.][A.]w = 0$. Therefore we can conclude $v = [A.]w \in \ker[A.]$. For the other implication : Suppose $\text{Im}[A.] \subset \ker[A.]$. We know that a , the vector form of the matrix A is in $\text{Im}[A.]$ (since $[A.]Id = a$). Therefore $[A.]A = A^2 = 0$.

4. Denote by Φ the map described in point 4. It is linear since $\Phi(A + \lambda B) = [A.] + \lambda[B.]$ for every $A, B \in M_2(K)$ and $\lambda \in K$. We let the reader prove the details of this. This map it is injective since

$$\Phi(A) = 0 \Leftrightarrow AM = 0 \text{ for all } M \in M_d(K) \Leftrightarrow A = 0.$$

5. First note that $M_d(K)$ and $\text{End}(M_d(K))$ are both K -algebras. For a morphism of K -algebras we need to show that it is a ring morphism and stable by multiplication of scalars from K . The linearity from the previous part checks everything except morphism under the internal multiplication, i.e. matrix multiplication. We check that $[AB.](M) = [A.][B.](M)$, hence it is a morphism of algebras.

6. Consider the canonical basis $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Then we have

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21}.$$

Similarly we can compute

$$\begin{aligned} AE_{12} &= a_{11}E_{12} + a_{21}E_{22}, \\ AE_{21} &= a_{12}E_{11} + a_{22}E_{21}, \\ AE_{22} &= a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22} \end{aligned}$$

Therefore we can write $[A.]$ in matrix form with respect to the canonical basis as follows

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Polynomes sur un corps (suite)

Exercice 9. Soient P et Q des polynomes non-nuls.

1. Montrer que $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Montrer que cette inégalité peut être stricte.
2. Montrer que $\deg(P \cdot Q) \leq \deg(P) + \deg(Q)$.
3. Montrer que si A est intègre alors $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. Montrer que ces résultats restent vrais si P ou Q est nul.
5. Montrer que si A est intègre alors $A[X]$ est intègre.

Solution 9.

1. Supposons sans perte de généralités : $d = \deg P \leq d' = \deg Q$, on a

$$P = \sum_{n=0}^d a_n x^n, \quad Q = \sum_{n=0}^{d'} b_n x^n$$

avec $a_d, b_{d'} \neq 0$. Supposons $d' \geq d$. En posant $a_n = 0$ si $n > d$, on a

$$P + Q = \sum_{n=0}^{d'} (a_n + b_n) x^n$$

et $\deg(P + Q) \leq d'$. L'inégalité peut être stricte :
 $\deg((x + 1) + (-x)) = 0 < 1 = \max(\deg(x + 1), \deg(-x))$

2. Si P et Q sont non-nuls, on a pour $n > \deg P + \deg Q$

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p \cdot b_q = 0_A$$

car si $p + q = n > \deg P + \deg Q$ ou bien $p > \deg P$ et $a_p = 0$ ou bien $q > \deg Q$ et $b_q = 0$. Ainsi $P \cdot Q$ est à support fini et de degré $\leq \deg P + \deg Q$.

3. Notons que

$$c_{\deg P + \deg Q} = a_{\deg P} \cdot b_{\deg Q}$$

avec $a_{\deg P}, b_{\deg Q} \neq 0$.

En particulier si A est intègre le produit des deux est non-nul $a_{\deg P}.b_{\deg Q} \neq 0$ et donc

$$\deg(P.Q) = \deg P + \deg Q.$$

4. SPG, si $Q = (0_A)_{n \geq 0}$ alors $P.Q = (0_A)_{n \geq 0}$ et compte-tenu du fait que $\deg 0_A = -\infty$ on a bien

$$\deg(P + Q) = \deg(P) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

$$\deg(P.Q) = -\infty = \deg P + \deg Q.$$

5. Supposons que A est intègre et soient P et Q tous deux non-nuls. En particulier, $\deg(P), \deg(Q) \geq 0$. Par le point 3., on a que $\deg(P.Q) = \deg P + \deg Q \geq 0$, et donc $P.Q$ est non nul.

Exercice 10. Soit $Q \in K[X] - \{0\}$ un polynome non-nul et P un polynome quelconque.

On veut montrer qu'il existe $R, S \in K[X]$ tels que

$$P = Q.S + R$$

avec $\deg R < \deg Q$, $\deg P = \deg Q + \deg S$ et que R et S sont uniques. R s'appelle le reste de la division euclidienne de P par Q et S est le quotient.

1. On commence par l'unicite. On suppose que

$$P = Q.S + R = Q.S' + R'$$

avec $\deg R, \deg R' < \deg Q$.

Montrer que $R - R'$ est divisible par Q puis que $R = R'$ (utiliser le (2) de l'exercice precedent) et enfin que $S = S'$ (utiliser le (5) de l'exercice precedent).

2. On passe a l'existence. Soit $d = \deg Q$. Montrer que si $\deg P < d$ alors R, S existent et donner leur valeurs.
3. On procede par recurrence sur $p := \deg P$. On peut supposer que $p \geq d$. On note a_d le coefficient dominant de Q ($Q = a_d.X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots$) et b_p celui de P ($P = b_p.X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \dots$).

Soit $P_1 = P - b_p a_d^{-1} Q.X^{p-d}$. Montrer que $\deg P_1 < p$.

4. En utilisant l'hypothèse de récurrence montrer que R, S existent pour P .

Solution 10. Soit $d = \deg Q$.

1. Montrons l'unicité : supposons que

$$P = Q.S + R = Q.S' + R'$$

avec $\deg R, \deg R' < d$. Alors

$$Q.S - Q.S' = Q.(S - S') = R' - R.$$

On a

$$\deg(Q.(S - S')) = d + \deg(S - S') = \deg(R' - R) < d$$

et la seule possibilité est que $S - S' = 0$ (de sorte que $\deg(S - S') = -\infty$) et donc $R' - R = 0$.

2. Si $\deg P = p < q$, on prend $R = P$ et $S = 0$ et on a bien $P = Q.S + R$ avec $\deg R < \deg Q$.
3. Écrivons

$$P = a_p.X^p + \dots + a_0.$$

$$Q = b_d.X^d + \dots + b_1.X + b_0, \quad b_d \neq 0.$$

On procède par récurrence sur p :

$$P_1 := P - \frac{a_p}{b_d}Q.X^{p-d} = a_p.X^p - \frac{a_p}{b_d}b_d.X^d.X^{p-d} + \text{polynôme de degré } \leq p-1$$

et comme

$$a_p.X^p - \frac{a_p}{b_d}b_d.X^d.X^{p-d} = 0$$

Le polynôme P_1 est de degré $\leq d-1$. Par récurrence sur le degré il existe R_1, S_1 tels que

$$P_1 = Q.S_1 + R_1$$

avec $\deg R_1 < q$ et donc

$$P = \frac{a_p}{b_d}Q.X^{p-d} + Q.S_1 + R_1 = Q.S + R$$

avec

$$S = \frac{a_p}{b_d} X^{p-d} + S_1, \quad R = R_1.$$

On conclut par récurrence.

Exercice 11. On va utiliser le resultat precedent pour donner la forme generale des ideaux de $K[X]$. On rappelle qu'un ideal $I \subset K[X]$ est un sous-groupe du groupe additif $(K[X], +)$ tel que

$$\forall Q \in I, S \in K[X], \implies Q.S \in I$$

Soit $I \neq \{0\}$ un ideal non-nul de $K[X]$ et $Q \in I - \{0\}$ un polynome non-nul tel que $\deg Q$ est minimal parmi les degres tous les polynomes non-nuls de I :

$$\deg Q = \min(\deg P, P \in I - \{0\}).$$

On va montrer que

$$I = K[X].Q = \{S.Q, S \in K[X]\} \subset K[X]$$

est l'ensemble des multiples de Q .

1. Soit $P \in I$ et R, S le reste et quotient de la division euclidienne de P par Q :

$$P = Q.S + R, \quad \deg R < \deg Q.$$

Montrer que $R \in I$.

2. En deduire que P est un multiple de Q et conclure.

Remarque. Comparer avec la classification des ideaux de \mathbb{Z}

Solution 11.

1. Par division euclidienne on peut écrire

$$P = Q.S + R$$

avec $\deg R < q = \deg Q$. On a

$$R = P - Q.S \in I$$

Car $P, Q \in I$ et pour tout $S \in K[X]$, $S.Q \in I$ par définition d'un idéal, et donc $R \in I$.

2. Par minimalité de q dans $I - \{0\}$, puisque $\deg R < q$, la seule possibilité est que $R = 0$ et donc $P = S.Q \in K[X].Q$.